一般選抜問題　前期（A 日程）

数　学

（配点と解答例）

第１問 (必答問題)　配点：25点

k を実数の定数とするとき，x の方程式

$$\log_2(x^2+1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)-\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{(x^2+1)^2}+k=0$$

の実数解の個数を調べよ。

[**解答**]　方程式の対数の底を2にそろえて整理すると，

$$\left\{\log_2(x^2+1)\right\}^2-4\log_2(x^2+1)=k \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$t=\log_2(x^2+1)$ とおくと，$t=\log_2(x^2+1)\geqq\log_2 1=0$ であるから，① は,

$$t^2-4t=k \quad (t\geqq 0) \quad \cdots\cdots ②$$

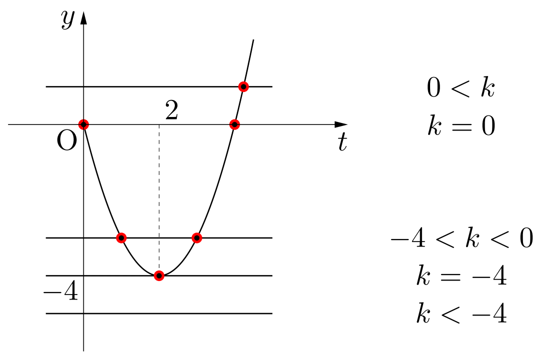
② を満たす t の個数は，放物線 $y=t^2-4t\ (t\geqq 0)$ と直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい。

また，$t=\log_2(x^2+1)$ より，$x=\pm\sqrt{2^t-1}$ となるから，② を満たす t に対して，① を満たす x の個数は，$t=0$ のとき，1個，$t>0$ のとき，2個ある。このことに注意すると，右下の放物線 $y=t^2-4t=(t-2)^2-4\ (t\geqq 0)$ のグラフと直線 $y=k$ のグラフとの関係から,

① を満たす実数解 x の個数は,

$k<-4$ のとき,	0個
$k=-4$，$0<k$ のとき,	2個
$k=0$ のとき,	3個
$-4<k<0$ のとき,	4個

となる。



第２問　(必答問題)　　配点：25 点

関数 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta-7}{\cos\theta-4}$ において，$t=f(\theta)$，$x=\cos\theta-4$，$y=\sin\theta-7$ とおくと，

$$\begin{cases} y=tx & \cdots\cdots\text{①} \\ \left(x+\boxed{4}\right)^2+\left(y+\boxed{7}\right)^2=\boxed{1} & \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

① を ② に代入して，y を消去すると，

$$\left(t^2+\boxed{1}\right)x^2+2\left(\boxed{7}\,t+\boxed{4}\right)x+\boxed{6}\,\boxed{4}=0 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

直線 ① と円 ② が共有点をもつためには，x の 2 次方程式 ③ の判別式を D としたとき，

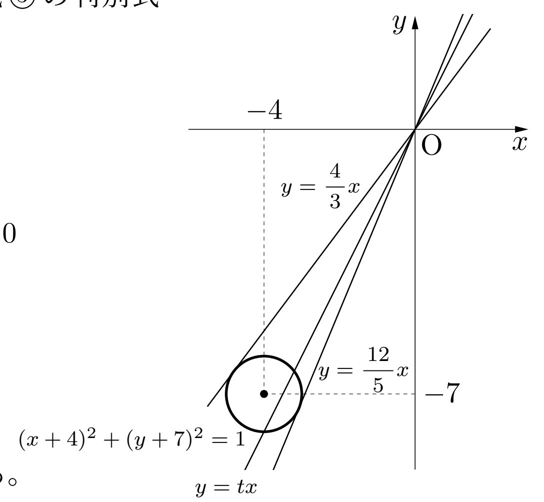
$$\frac{D}{4}=(7t+4)^2-64(t^2+1)\geqq 0$$

でなければならない。これより，t に関する 2 次不等式

$$15t^2-\boxed{5}\,\boxed{6}\,t+\boxed{4}\,\boxed{8}\leqq 0$$

が得られる。これを解くと，

$$\frac{\boxed{4}}{3}\leqq t\leqq\frac{\boxed{1}\,\boxed{2}}{5}$$



となるから，関数 $f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{12}{5}$，最小値は $\dfrac{4}{3}$ となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
1	4	4	
2	7		
3	1		
4	1	7	
5	7		
6	4		
7	6		
8	4		

解答番号	正　解	配　点	備　考
9	5	7	
10	6		
11	4		
12	8		
13	4	7	
14	1		
15	2		

第３問　(学科別問題)　（Ｋ／Ｒ科またはＪ科 (学内併願) 志願者選択）　配点：25 点

2 次関数 $f(x)=x^2-8x+15$ と $f(a)>0$ を満たす定数 a に対して，漸化式

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n\geqq 1)$$

によって定められる数列 $\{x_n\}$ について考えよう。ここで，$f'(x)$ は，$f(x)$ の導関数である。

定数 a のとり得る値の範囲は，$a<\boxed{3}$，$\boxed{5}<a$ である。

また，$f'(x)=\boxed{2}\,x-\boxed{8}$ であるから，漸化式は，

$$x_{n+1}=\frac{1}{\boxed{2}}\left(x_n+\boxed{4}+\frac{1}{x_n-\boxed{4}}\right)$$

と表される。これより，$\dfrac{x_{n+1}-3}{x_{n+1}-5}=\left(\dfrac{x_n-3}{x_n-5}\right)^{\boxed{2}}$ となるから，

$\dfrac{x_n-3}{x_n-5}=\left(\dfrac{a-3}{a-5}\right)^{2^{n-\boxed{1}}}$ が得られる。

したがって，数列 $\{x_n\}$ の一般項は，

$$x_n=\frac{\boxed{3}-\boxed{5}\left(\dfrac{a-3}{a-5}\right)^{2^{n-1}}}{\boxed{1}-\left(\dfrac{a-3}{a-5}\right)^{2^{n-1}}}$$

となる。また，数列 $\{x_n\}$ の極限値は，

$a<3$ のとき，$\dfrac{a-3}{a-5}=\dfrac{3-a}{5-a}=\dfrac{3-a}{2+(3-a)}<1$ より，$0<\dfrac{a-3}{a-5}<1$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{3}$

$5<a$ のとき，$\dfrac{a-3}{a-5}=\dfrac{(a-5)+2}{a-5}>1$ より，$0<\dfrac{a-5}{a-3}<1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\dfrac{a-5}{a-3}\right)^{2^{n-1}}-5}{\left(\dfrac{a-5}{a-3}\right)^{2^{n-1}}-1}=\boxed{5}$$

である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
16	3	2	
17	5		
18	2	2	
19	8		
20	2	4	
21	4		
22	4		

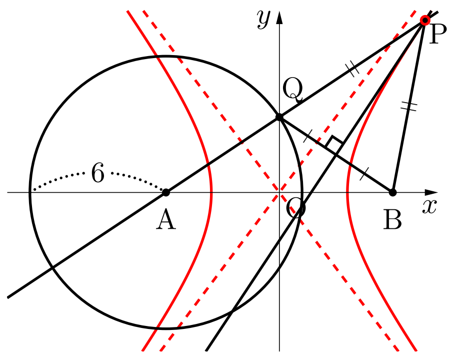
解答番号	正　解	配　点	備　考
23	2	3	
24	1	3	
25	3	3	
26	5		
27	1		
28	3	4	
29	5	4	

第４問　(学科別問題)　（Ｋ／Ｒ科またはＪ科 (学内併願) 志願者選択)　　配点：25 点

[１]　2 点 A$(-5,\ 0)$，B$(5,\ 0)$ と円 $(x+5)^2+y^2=36$ がある。

円上に点 Q をとり，線分 BQ の垂直二等分線と直線 AQ との交点を P とする。

このとき，右図より，PB ＝ PQ であるから，



$|\mathrm{PA}-\mathrm{PB}|=|\mathrm{PA}-\mathrm{PQ}|=\mathrm{QA}=\boxed{6}$ となる。

したがって，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\pm 6$ となる。

これを変形すれば，点 P の軌跡は，双曲線

$$\frac{x^2}{\boxed{9}}-\frac{y^2}{\boxed{1}\boxed{6}}=1$$

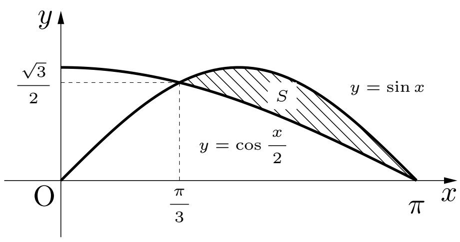
である。また，この双曲線の漸近線の方程式は，$y=\pm\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}}x$ である。

[２]　$0\leqq x\leqq \pi$ において，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos\dfrac{x}{2}$ で囲まれた図形がある。

(1)　$\sin x-\cos\dfrac{x}{2}=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=\cos\dfrac{x}{2}\left(2\sin\dfrac{x}{2}-1\right)$，$0\leqq\dfrac{x}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，

$\sin x-\cos\dfrac{x}{2}=0$ とすると，$\cos\dfrac{x}{2}=0$，$\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ より，$x=\dfrac{\pi}{\boxed{3}}$，π である。

(2)　図形の面積を S とすると，



$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[-\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$ である。

(3)　図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^2 x\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\{(1-\cos 2x)-(1+\cos x)\}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{8}}\pi$$ である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
30	6	4	
31	9	5	
32	1		
33	6		
34	4	3	
35	3		

解答番号	正　解	配　点	備　考
36	3	3	
37	1	5	
38	2		
39	3	5	
40	3		
41	8		

第５問　(学科別問題)　(Ｊ科専願志願者選択)　　配点：25 点

Ｃ市の住民の a ％の人は，ウイルスＶに感染している。このウイルスに感染したかどうかを判定する検査法Ｔでは，感染した人を陽性と判定する確率が 70％，感染していない人を陰性と判定する確率が 90％である。ただし，a は $0 \leqq a \leqq 100$ の実数とする。

Ｃ市のＡさんが検査法Ｔを受けて陽性と判定されたとき，Ａさんがウイルスに感染している確率を考えよう。

ＡさんがウイルスＶに感染している事象を K，検査法Ｔを受けて陽性と判定される事象を Y とすると，$P(K) = a\,\% = \dfrac{a}{100}$ より，$P\left(\overline{K}\right) = 1 - P(K) = \boxed{1} - \dfrac{a}{100}$，$P_K(Y) = 70\,\% = \dfrac{\boxed{7}}{10}$，

$$P_{\overline{K}}(Y) = \frac{P\left(\overline{K} \cap Y\right)}{P\left(\overline{K}\right)} = \frac{P\left(\overline{K}\right) - P\left(\overline{K} \cap \overline{Y}\right)}{P\left(\overline{K}\right)} = 1 - P_{\overline{K}}\left(\overline{Y}\right) = 1 - 90\,\% = \frac{\boxed{1}}{10}$$ であるから，

Ａさんが陽性と判定される確率は，

$$P(Y) = P(Y \cap K) + P\left(Y \cap \overline{K}\right) = P(K) \cdot P_K(Y) + P\left(\overline{K}\right) \cdot P_{\overline{K}}(Y) = \frac{\boxed{3}\,a + \boxed{5}\,\boxed{0}}{500}$$

となる。

したがって，Ａさんが陽性と判定されたとき，ウイルスＶに感染している確率は，

$$P_Y(K) = \frac{P(Y \cap K)}{P(Y)} = \frac{P(K) \cdot P_K(Y)}{P(Y)} = \frac{\boxed{7}\,a}{\boxed{6}\,a + 100}$$

である。Ｃ市の住民のうち，ウイルスＶに感染している割合が５％未満であるとき，$0 \leqq a < 5$ より，

$$100 \leqq 6a + 100 < 130 \iff \frac{10}{13} < \frac{100}{6a+100} \leqq 1 \iff 0 \leqq 1 - \frac{100}{6a+100} < \frac{3}{13}$$ であるから，

$$P_Y(K) = \frac{7a}{6a+100} = \frac{7}{6} \cdot \left(1 - \frac{100}{6a+100}\right) < \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{13}$$ より，$P_Y(K) < \dfrac{\boxed{7}}{\boxed{2}\,\boxed{6}}$ である。

また，Ａさんが陽性と判定されたとき，ウイルスＶに感染していない確率が 25％以下のときは，

$P_Y\left(\overline{K}\right) \leqq \dfrac{1}{4}$ となる。ここで，$P_Y\left(\overline{K}\right) = \dfrac{P\left(Y \cap \overline{K}\right)}{P(Y)} = \dfrac{P(Y) - P(Y \cap K)}{P(Y)} = 1 - P_Y(K)$ より，

a に関する不等式 $1 - \dfrac{7a}{6a+100} \leqq \dfrac{1}{4}$ が得られる。これを解くと，$a \geqq 30$ となるから，

Ｃ市の住民のうち，$\boxed{3}\,\boxed{0}$ ％以上の人が，ウイルスＶに感染していることが分かる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
42	1	2	
43	7	2	
44	1	2	
45	3	5	
46	5		
47	0		

解答番号	正　解	配　点	備　考
48	7	5	
49	6		
50	7	5	
51	2		
52	6		
53	3	4	
54	0		

第６問　(学科別問題)　(Ｊ科専願志願者選択)　　配点：25 点

放物線 $y=x^2$ を C_1 とし，2 点 A$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$，B$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ で C_1 と接する円を C_2 とする。
また，放物線 C_1 上の点 A における接線を l_1，点 A を通り，l_1 と垂直な直線を l_2 とする。

(1)　$f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$ より，直線 l_1 の傾きは $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{1}$ となる。

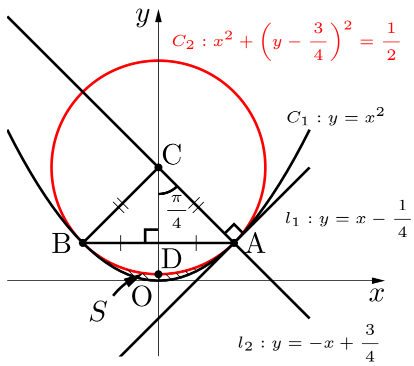
これより，直線 l_1 の方程式は，$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ となるから，直線 l_1 の切片は $-\dfrac{1}{\boxed{4}}$ である。

また，直線 l_2 は直線 l_1 と垂直であるから，直線 l_2 の傾きは $-\boxed{1}$ となる。

これより，直線 l_2 の方程式は，$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ となるから，直線 l_2 の切片は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である。

(2)　右の図において，円 C_2 の中心を C とすると，点 C は直線 l_2 と線分 AB の垂直二等分線である y 軸との交点だから，円 C_2 の中心は $\left(\boxed{0},\ \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\right)$ となる。

半径は $\mathrm{AC}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{2}}}$ である。



(3)　放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた部分の面積 S を求めよう。
第 1 象限において，放物線 C_1 と直線 l_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めると，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-x+\frac{3}{4}-x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}\boxed{4}}$$ となる。

また，右上の図において，円 C_2 と y 軸との交点のうち，下の方を D として，扇形 DCA の中心角は $\dfrac{\pi}{4}$ だから，扇形 DCA の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{16}$ となる。放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた部分の図形は，y 軸に関して対称だから，$S=2\left(\dfrac{5}{24}-\dfrac{\pi}{16}\right)=\dfrac{5}{\boxed{1}\boxed{2}}-\dfrac{\pi}{\boxed{8}}$ である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
55	1	2	
56	4	2	
57	1	2	
58	3	2	
59	4		
60	0	4	
61	3		
62	4		

解答番号	正　解	配　点	備　考
63	2	3	
64	5	5	
65	2		
66	4		
67	1	5	
68	2		
69	8		