第１問　次の文章を読み，該当する解答群から適切なものを選んで $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ を埋めよ。

図１のように水平なレール AB の先に，半径 r〔m〕，中心角 90° の円弧状のレール $\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$ が接続されている。今，水平なレールの上で質量 m〔kg〕の大きさが無視できる球に，図の右向きに初速度 v〔m/s〕を与え，レールによって進行方向を変えて鉛直上向きに打ち上げることを考える。レールと球の間に摩擦はなく，重力加速度を g〔$\mathrm{m/s^2}$〕として，以下の問いに答えよ。

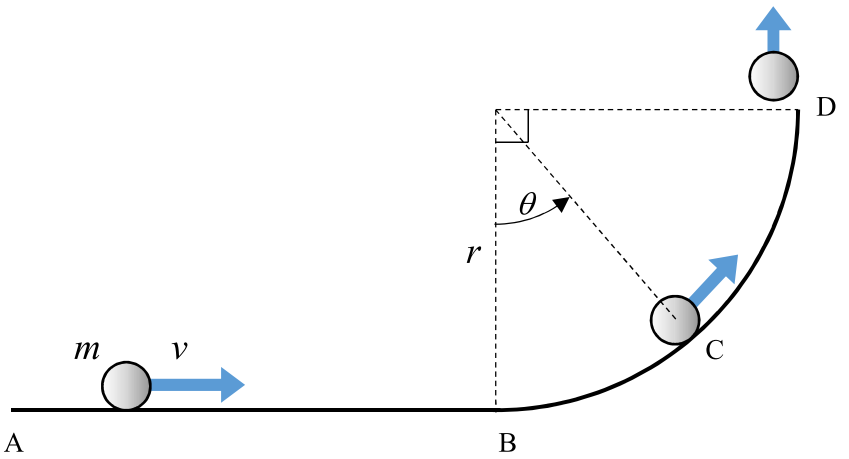


図１

問１　球が円弧中で図の角度 θ〔°〕の位置である C 点に達したときの位置エネルギーは，水平なレール上を基準として $\boxed{1}$〔J〕で表される。

問２　力学的エネルギー保存の法則より，C 点における運動エネルギーは $\boxed{2}$〔J〕で表され，その時の球の速度は $\boxed{3}$〔m/s〕である。

問３　球が円弧の最上点 D を超えるには，初速度が $\boxed{4}$〔m/s〕以上でなければならない。

問４　球が水平なレール上を基準として $8r$〔m〕の高さまでに達するために必要な初速度は $\boxed{5}$〔m/s〕で表される。

[１の解答群]

(1) $mgr\sin\theta$　　(2) $mgr\cos\theta$　　(3) $mgr(1-\sin\theta)$

(4) $mgr(1-\cos\theta)$　　(5) $\dfrac{1}{2}mgr\sin\theta$　　(6) $\dfrac{1}{2}mgr(1-\cos\theta)$

[２の解答群]

(1) $\frac{1}{2}mv^2+mgr(1-\cos\theta)$　(2) $\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\cos\theta)$　(3) $\frac{1}{2}mv^2-mgr\cos\theta$

(4) $\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\sin\theta)$　(5) $\frac{1}{2}\left(mv^2-mgr\cos\theta\right)$　(6) $\frac{1}{2}mv^2+mgr\sin\theta$

[３の解答群]

(1) $\sqrt{v^2-2gr(1-\sin\theta)}$　(2) $\sqrt{v^2+2gr(1-\cos\theta)}$　(3) $\sqrt{2v^2-gr(1-\cos\theta)}$

(4) $\sqrt{v^2-2gr\cos\theta}$　(5) $\sqrt{v^2-gr(1-\cos\theta)}$　(6) $\sqrt{v^2-2gr(1-\cos\theta)}$

[４，５の解答群]

(1) $\sqrt{gr}$　(2) $\sqrt{2gr}$　(3) $2\sqrt{gr}$

(4) $2\sqrt{2gr}$　(5) $4\sqrt{gr}$　(6) $4\sqrt{2gr}$

【解答】

問１　球が円弧中で図の角度 θ〔°〕の位置である C 点に達したときの位置エネルギーは，水平なレール上を基準として $\boxed{\ 1\ }$〔J〕で表される。

水平レール上に対し，C 点における球の高さは $r(1-\cos\theta)$ となる。これに重力を掛けて $mgr(1-\cos\theta)$ を得る。

・・・（4）

問２　力学的エネルギー保存の法則より，C 点における運動エネルギーは $\boxed{\ 2\ }$〔J〕で表され，その時の球の速度は $\boxed{\ 3\ }$〔m/s〕である。

C 点における運動エネルギーを E_{KC} とすると，力学的エネルギー保存則により，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=E_{KC}+mgr(1-\cos\theta)$$

これを解いて，

$$E_{KC}=\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\cos\theta)$$

・・・（2）

C 点における速度を v_C とすると，

$$E_{KC}=\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\cos\theta)$$

これをv_Cについて解くと，

$$v_C=\sqrt{v^2-2gr(1-\cos\theta)}$$

・・・（6）

問３　球が円弧の最上点Ｄを超えるには，初速度が $\boxed{\quad 4 \quad}$〔m/s〕以上でなければならない。

問２の解に$\theta=90^\circ$を代入し，Ｄ点における速度v_Dを求めると，

$$v_D=\sqrt{v^2-2gr}$$

Ｄ点に達するためには，上式が実数，すなわちルートの中が正でなければならない（負の場合はＤ点に到達する前に速度が０になり戻ってくる）。よって，

$$v_D^2-2gr>0$$
$$v_D>\sqrt{2gr}$$

・・・（2）

問４　球が水平なレール上を基準として８r〔m〕の高さまでに達するために必要な初速度は $\boxed{\quad 5 \quad}$〔m/s〕で表される。

高さ８rにおける位置エネルギーは$8mgr$である。最高点では運動エネルギーが０となるため，運動エネルギー保存則より、レール上における運動エネルギーがこれと等しくなる。したがって，

$$8mgr=\frac{1}{2}mv^2$$
$$16gr=v^2$$
$$v=4\sqrt{gr}$$

・・・（5）

第２問　次の文章を読み，以下の問いに答えよ。解答は記述問題解答用紙に考え方の過程も分かるように記述せよ。

図２のように高さh〔m〕，底面の辺の長さがa〔m〕，b〔m〕（ただし,$a>b$とする）で，質量m〔kg〕の一様な直方体がある。この直方体をあらい平板に載せ，平板を水平から徐々に傾ける。図(a)のように辺 a のみを傾ける方向では倒れることなく滑り出し，図(b)のように辺 b のみを傾ける方向では滑り出す前に倒れた。直方体の底面と平板の間の静止摩擦係数μの範囲を求めよ。なお，解答に際し，必要に応じて重力加速度g〔m/s^2〕，平板の水平からの角度θ〔°〕を用いてよい。さらに必要なものがあれば自分自身で定義して説明に使用すること。

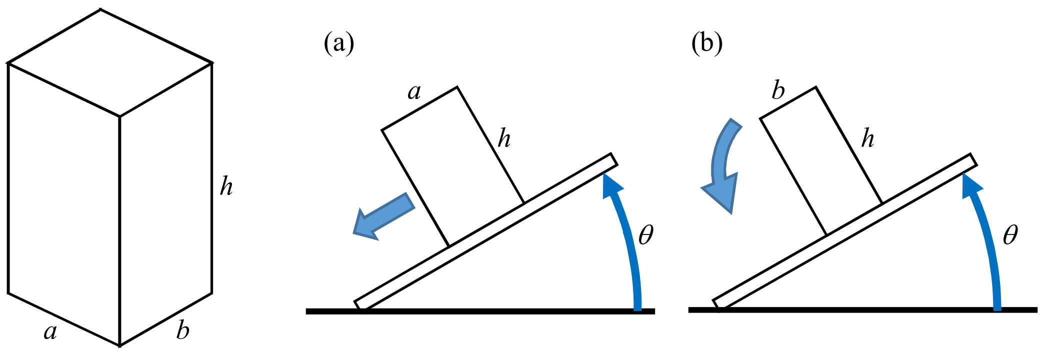
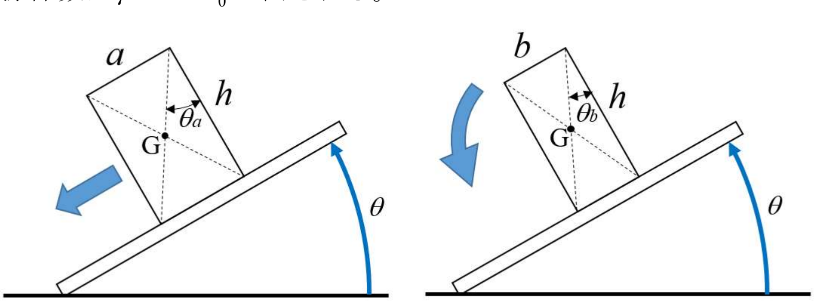


図２

【解答例】

平面を水平からθ傾けていったとき，物体が滑り出す角度を摩擦角と呼ぶ．これをθ_0とすると，静止摩擦係数は$\mu = \tan\theta_0$で表される。



直方体の重心 G は，側面を真横から見た際、その側面の対角線の交点に位置する。上図のようにθ_a, θ_bを定義すると，$\theta_a = \tan^{-1}\dfrac{a}{h}$，$\theta_b = \tan^{-1}\dfrac{b}{h}$となる。

(a)において物体が倒れるのは$\theta > \theta_a$，すなわち，$\theta > \tan^{-1}\dfrac{a}{h}$の時であるから、その前に滑

り出すということは$\theta_0 < \theta_a = \tan^{-1}\dfrac{a}{h}$．よって$\mu = \tan\theta_0 < \dfrac{a}{h}$．同様に考えると，(b)によって物体が倒れるのは$\tan\theta > \theta_b$，すなわち，$\theta > \tan^{-1}\dfrac{b}{h}$の時であり，この時滑り出さないということは$\theta_0 > \tan^{-1}\dfrac{b}{h}$，よって$\mu = \tan\theta_0 > \dfrac{b}{h}$．したがって、これらを合わせると$\dfrac{a}{h} > \mu > \dfrac{b}{h}$となる。

答：$\underline{\dfrac{a}{h} > \mu > \dfrac{b}{h}}$

【採点基準】
・摩擦角θ_0の定義を明記、あるいは垂直抗力と重力の斜面方向成分から$\mu = \tan\theta_0$であることを導いていれば 10 点
・重心の位置を考慮し、直方体が倒れる角度を導いていれば 5 点
・倒れる前に滑り出すという条件から$\theta_0 < \tan^{-1}\dfrac{a}{h}$であることを導いていれば 5 点
・滑る前に倒れるという条件から$\theta_0 > \tan^{-1}\dfrac{b}{h}$であることを導いていれば 5 点
・使用する記号θ_0などは回答者により異なるが、その定義が明確に記載されていること。不備がある場合は、それぞれにつき 2 点減点

第３問　次の文章を読み，該当する解答群から適切なものを選んで $\boxed{\ 6\ }$ ～ $\boxed{\ 10\ }$ を埋めよ。

真空中で初速度 0 の電子（質量 m〔kg〕，電気量 $-e$〔C〕）を加速電圧 V〔V〕で加速して電子線を得た。この電子線を，図３のように結晶面間隔 d〔m〕の結晶に角度 θ〔°〕の方向から入射し，反射波の強度を測定した。

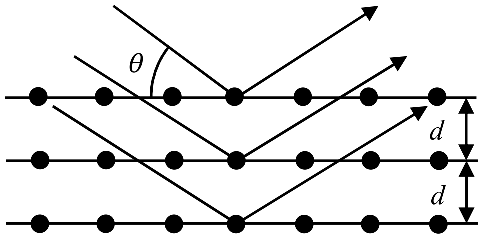


図３

問１　加速した電子が得た運動エネルギーは $\boxed{\ 6\ }$〔J〕であり，電子の速さは $\boxed{\ 7\ }$〔m/s〕である。

問２　電子の運動量 p〔kg·m/s〕と電子線の波長 λ〔m〕には $\lambda=\dfrac{h}{p}$ の関係がある。ここで，h〔J·s〕はプランク定数である。よって，得られた電子線の波長は $\lambda=$ $\boxed{\ 8\ }$〔m〕である。

問３　波長 λ の電子線を結晶に入射させると，$\boxed{\ 9\ }$ の条件で強い反射が起こる。ただし，n は正の整数を表す。

問４　電子線の入射角 θ〔°〕を 0°から増加させたところ，30°で初めて強い反射波が観測されたとすると，結晶面間隔は $d=$ $\boxed{\ 10\ }$〔m〕と求められる。

[６の解答群]

(1) eV　(2) $\dfrac{e}{V}$　(3) $\dfrac{V}{e}$　(4) $\dfrac{1}{eV}$　(5) $\sqrt{eV}$

[７の解答群]

(1) $\sqrt{2meV}$　(2) $\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$　(3) $\sqrt{\dfrac{2mV}{e}}$　(4) $\sqrt{\dfrac{2m}{eV}}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2meV}}$

[８の解答群]

(1) $h\sqrt{2meV}$　(2) $\dfrac{h\sqrt{m}}{\sqrt{2eV}}$　(3) $\dfrac{h\sqrt{2eV}}{\sqrt{m}}$　(4) $\dfrac{h\sqrt{V}}{\sqrt{2me}}$　(5) $\dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$

[９の解答群]

(1) $d\sin\theta = n\lambda$　(2) $d\cos\theta = n\lambda$　(3) $2d\sin\theta = n\lambda$　(4) $2d\cos\theta = n\lambda$

(5) $2d\sin\theta = (2n+1)\lambda$

[１０の解答群]

(1) $h\sqrt{2meV}$　(2) $h\sqrt{6meV}$　(3) $\dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$　(4) $\dfrac{h}{\sqrt{6meV}}$　(5) $\dfrac{2h}{\sqrt{6meV}}$

＜解答＞

問１　６ (1)

電圧 V で加速された電荷 e の電子が得た運動エネルギは eV である。

問１　７ (2)

$eV = \dfrac{1}{2}mv^2$ を変形して $v = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$ となる。

問２　８ (5)

$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$ に上式を代入して $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$ となる。

問３　９ (3)

ブラッグの条件式は $2d\sin\theta = n\lambda$ である。

問４　１０ (3)

ブラッグの条件式を変形して、$n = 1$、$\theta = 30°$、$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$ を代入すると $d = \dfrac{n\lambda}{2\sin\theta} = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$

となる。

第４問　次の文章を読み，該当する解答群から適切なものを選んで $\boxed{１１}$ ～ $\boxed{１５}$ を埋めよ。

図４に示す真空中の x-y 平面上で，長さ a〔m〕を単位として， x 軸上の 2 点 $P_1\left(-\sqrt{3}a, 0\right)$，$P_2\left(\sqrt{3}a, 0\right)$ に，ともに正の電荷 q〔C〕が存在する場合を考える。真空の誘電率を ε_0〔F/m〕とするとき，以下の問いに答えよ。

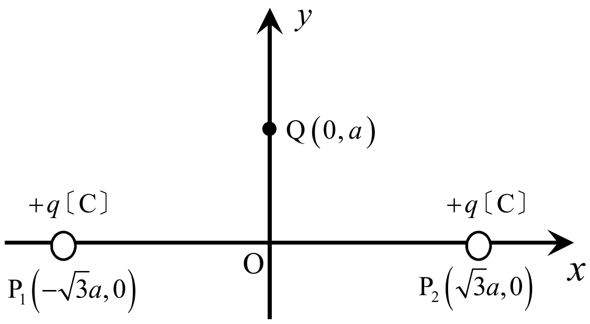


図４

問１　原点Oの電位は $\boxed{１１}$〔V〕である。
問２　点 P_1 の電荷が原点Oに作る電場の強さは $\boxed{１２}$〔V/m〕である。
問３　原点Oの電場の強さは $\boxed{１３}$〔V/m〕である。
問４　y 軸上の点 $Q\,(0, a)$ の電位は $\boxed{１４}$〔V〕である。
問５　点Qの電場の強さは $\boxed{１５}$〔V/m〕である。

[１１の解答群]

(1) $\dfrac{q}{12\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$　(2) $\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$　(3) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$　(4) $\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$　(5) $\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$

[１２，１３の解答群]

(1) $\dfrac{-q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$　(2) $\dfrac{-q}{6\pi\varepsilon_0 a^2}$　(3) 0　(4) $\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 a^2}$　(5) $\dfrac{q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$

[１４の解答群]

(1) $\dfrac{q}{32\pi\varepsilon_0 a}$　(2) $\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a}$　(3) $\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$　(4) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$　(5) $\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

[１５の解答群]

(1) $\dfrac{q}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$　(2) $\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$　(3) $\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$　(4) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$　(5) $\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$

＜解答＞

問１　P_1が原点Oに作る電位は$V_{P_1O}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$〔$V$〕、$P_2$が原点$O$に作る電位は

$V_{P_2O}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}$〔$V$〕で与えられるので、原点$O$での電位$V_O$は$V_O=V_{P_1O}+V_{P_2O}$から

$$V_O=V_{P_1O}+V_{P_2O}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{3}a}\text{〔}V\text{〕}$$

解：(4)

問２　P_1が原点Oに作る電界の強さは$E_{P_1O}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 3a^2}=\dfrac{q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$〔$V/m$〕、向きは左向き

解：(5)

問３　P_2が原点Oに作る電界の強さは$E_{P_2O}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 3a^2}=\dfrac{q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}$〔$V/m$〕、向きは右向き

で与えられるので、右向きを正とすると点Oでの電界の強さはE_Oは

$$E_O=E_{P_1O}+E_{P_2O}=\frac{-q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}+\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 a^2}=0\text{〔}V/m\text{〕となる。}$$

解：(3)

問４　P_1が点Qに作る電位は$V_{P_1Q}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}=\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$〔$V$〕、$P_2$が点$Q$に作る電位は

$V_{P_2Q}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}=\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$〔$V$〕で与えられるので、点$Q$での電位$V_O$は$V_Q=V_{P_1Q}+V_{P_2Q}$から

$$V_O=V_{P_1OQ}+V_{P_2OQ}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\text{〔}V\text{〕}$$

解：(4)

問５　P_1が点Qに作る電界の強さは$E_{P_1Q}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2^2 a^2}=\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$〔$V/m$〕、向きは$x$軸に対して

$\pi/3$。P_2が点Qに作る電界の強さは$E_{P_2Q}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2^2 a^2}=\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$〔$V/m$〕, 向きは$x$軸に対して$2\pi-\pi/3$で与えられるので、右向きを正とすると点$O$での電界の強さは$E_O$は

$$E_O=E_{P_1O}\cos(\pi/3)+E_{P_2O}\cos(2\pi-\pi/3)=E_{P_1O}/2+E_{P_2O}/2=\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\text{〔}V/m\text{〕となる。}$$

解：(2)