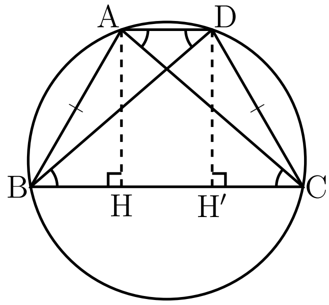
一般選抜試験 前期 (A 日程)

数　学

(　配点と解答例　)

第１問　(必答問題)　　配点：25 点

半径 $\sqrt{21}$ の円に内接する四角形ABCDにおいて，A が鈍角であり，4つの辺のうち，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=6$，$\mathrm{DA}=3$ であるとき，残りの辺BCの長さを求めよ。



[解答] 半径 $\sqrt{21}$ の円に内接する △ABD において，

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin A}=2\sqrt{21}$ すなわち

$$\mathrm{BD}=2\sqrt{21}\sin A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\cos A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

① を ② の左辺に代入すると，$28\cos^2 A-12\cos A-13=0$ となるから，これを $\cos A$ について解くと，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{13}{14}$ となる。ここで，A は鈍角であるから，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$ となる。したがって，$A=120^\circ$ となる。

右上の図の四角形ABCDにおいて，円に内接する四角形の対角の和は 180° だから，$A=120^\circ$ の対角は，$C=60^\circ$ となる。

また，AB=CDと円周角の定理より，∠ADB= ∠DBC (錯角が等しい) となり，AD // BC が言えるから，四角形ABCDは，AB=CDの台形 (等脚台形) となる。

A，Dから辺BCに垂線を下ろしたときの交点をそれぞれH，H′ とすると，△ABH≡ △DCH′ となる。このとき，$B=C=60^\circ$，$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}'=6\cos 60^\circ=3$，$\mathrm{HH}'=\mathrm{AD}=3$ となる。

よって，$\mathrm{BC}=9\cdots$ (答え)

[別解] 四角形ABCDが等脚台形であることを利用しない方法

△CDB において，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=6^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot 6\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$A=120^\circ$ を ① の右辺に代入すると，$\mathrm{BD}=3\sqrt{7}$ となる。これと $C=60^\circ$ を ③ の左辺と右辺にそれぞれ代入すると，$\mathrm{BC}^2-6\mathrm{BC}-27=0$ となるから，これを解くと，

$\mathrm{BC}=-3$，9 となる。ここで，$\mathrm{BC}>0$ だから，$\mathrm{BC}=9\cdots$ (答え)

第2問 (必答問題)　配点：25点

[1] $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ で，$4<\sqrt{5}+2<5$ だから，$\sqrt{5}+2$ の小数部分を a とすると，

$\sqrt{5}+2=4+a$ すなわち，$a=\sqrt{5}-2$ となる。$a+2=\sqrt{5}$ として，両辺2乗すると，

$a^2+4a-1=0$ となる。ここで，$a \fallingdotseq 0$ だから，両辺 a で割ると，$a-\dfrac{1}{a}=-4$ が得られる。これより，$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2=18$ となる。

さらに，$a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\dfrac{1}{a^2}\right)=-76$ となる。

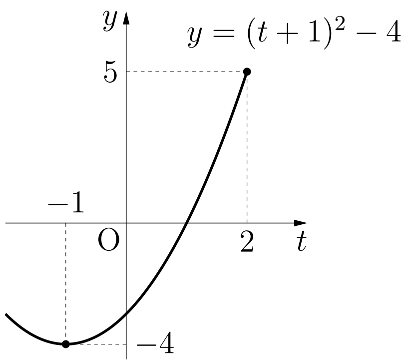
解答番号	正　解	配　点	備　考
1	4	3	
2	1	3	
3	8		

解答番号	正　解	配　点	備　考
4	7	4	
5	6		

[2] $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 4$ のとき，$t=\log_2 x$ の値の範囲は，$-1 \leqq t \leqq 2$ となる。

また，関数は，

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_2 \frac{x}{2}\right)\cdot(\log_2 8x) \\ &= (\log_2 x-1)\cdot(\log_2 x+3) \\ &= (t-1)(t+3) \\ &= t^2+2t-3 \\ &= (t+1)^2-4 \end{aligned}$$



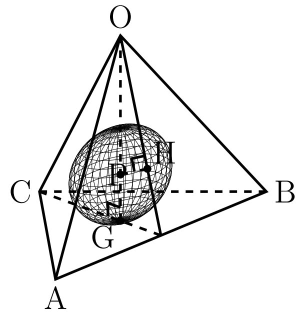
となるから，y は，$t=2$ すなわち，$x=4$ のとき，最大値 5 をとり，$t=-1$ すなわち，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 -4 をとる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
6	1	3	
7	2		
8	1	4	
9	4		

解答番号	正　解	配　点	備　考
10	2	4	
11	4		
12	5		
13	1	4	
14	2		
15	4		

第3問　(学科別問題)　(K／R科またはJ科 (学内併願) 志願者選択)　配点：25点

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，これに内接する球の中心をP，△ABCの重心をGとすると，



$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+1\cdot\vec{c}}{1+2}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{k}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

となる。

一方，△OABの重心をHとすると，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ と△OABは垂直だから，特に

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\vec{a}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

となる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ と①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{k}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{k-1}{3}\vec{a}+\frac{k-1}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$$

となる。これを②の左辺に代入して，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ=1$，$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ を用いると，

$$\frac{k-1}{3}+\frac{k-1}{6}+\frac{k}{6}=0$$

となるから，これを解くと，$k=\dfrac{3}{4}$ となる。

よって，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ が得られる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
16	3	3	
17	0	2	
18	1	6	
19	3		
20	1		
21	1	2	
22	1	2	
23	2		

解答番号	正　解	配　点	備　考
24	1	2	
25	2		
26	3	6	
27	4		
28	1	2	
29	4		

第4問　(学科別問題)　(K／R科またはJ科 (学内併願) 志願者選択)　配点：25点

曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ を C として，C 上の接点を $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ とすると，この点における接線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

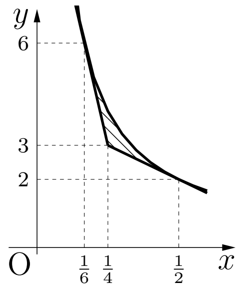
となる。これが点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ 3\right)$ を通るから，a に関する2次方程式 $12a^2 - 8a + 1 = 0$ が得られる。

これを解くと，$a = \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2}$ となるから，これらを①の右辺に代入すると，接線の方程式は，

それぞれ $y = -36x + 12$，$y = -4x + 4$ となる。

これら2つの接線と曲線 C とで囲まれた図形の面積 S を定積分を

用いて計算すると，



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{1}{x} - (-36x + 12) \right\} dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{x} - (-4x + 4) \right\} dx \\ &= \Big[\log|x| + 18x^2 - 12x \Big]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} + \Big[\log|x| + 2x^2 - 4x \Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \log 3 - 1 \end{aligned}$$

となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
30	1	4	
31	2		
32	3	4	
33	6		
34	1		
35	2		

解答番号	正　解	配　点	備　考
36	4	4	
37	4		
38	4	4	
39	6		
40	2	3	
41	3	6	
42	1		

第５問　(学科別問題)　(Ｊ科専願志願者選択)　　配点：25 点

500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の 3 種類の硬貨がある。

(1) 3 種類の硬貨を使って，1000 円支払う方法を考える。ただし，硬貨は何枚使ってもよいし，また，使わない硬貨があってもよいものとする。

500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の枚数をそれぞれ x，y，z 枚とすると，これらは 0 以上の整数で，$500x+100y+50z=1000$ すなわち，

$$10x+2y+z=20 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

を満たす。このとき，$10x \leqq 20$ すなわち，$x \leqq 2$ だから，整数 x の最大値は 2 である。

[1] $x=0$ のとき，①は，$2y+z=20$ となる。これを満たす $(y,\ z)$ は，11 通り。

[2] $x=1$ のとき，①は，$2y+z=10$ となる。これを満たす $(y,\ z)$ は，6 通り。

[3] $x=2$ のとき，①は，$2y+z=0$ となる。これを満たす $(y,\ z)$ は，1 通り。

これらは同時に起こらないから，求める場合の数は，$11+6+1=18$ 通り $\cdots$ (答え)

(2) 3 種類の硬貨をそれぞれ 1 枚以上使って，前問 (1) を考える。あらかじめ，1 枚ずつ使って，残りの 1000 円 − 500 円 − 100 円 − 50 円 = 350 円 を支払う方法を考える。

350 円支払うときの 500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の枚数をそれぞれ x，y，z 枚とすると，これらは 0 以上の整数で，$500x+100y+50z=350$ すなわち，$10x+2y+z=7$ を満たす。このとき，$10x \leqq 7$ より，$x=0$ となるから，$2y+z=7$ を満たす $(y,\ z)$ を考えると，求める場合の数は，4 通り $\cdots$ (答え)

(3) 3 種類の硬貨の使える枚数の上限を 3 としたときの，支払える金額を考える。

　100 円硬貨 3 枚と 50 円硬貨 3 枚を使ってできる金額は，0 円も含めて，
0 円，50 円，$\cdots$，450 円 の 10 通り。

　また，500 円硬貨 3 枚を使ってできる金額は，0 円も含めて，
0 円，500 円，1000 円，1500 円 の 4 通り。

　よって，支払える金額は，0 円の場合を除いて，$10\times4-1=39$ 通り $\cdots$ (答え)

解答番号	正　解	配　点	備　考
43	1	3	
44	0		
45	2		
46	2		
47	0		
48	2	3	
49	1	4	
50	8		

解答番号	正　解	配　点	備　考
51	7	3	
52	4	3	
53	1	3	
54	0		
55	4	3	
56	3	3	
57	9		

第6問　(学科別問題)　(Ｊ科専願志願者選択)　　配点：25点

座標平面上に曲線 $C : y = x^3 - 2x$ と曲線 C 上の点 P(2, 4) があり，曲線 C 上の点 P における接線を l とする。

(1) 接線 l の方程式を求める。$y' = 3x^2 - 2$ だから，接線の傾きは，$3 \cdot 2^2 - 2 = 10$ となる。

したがって，接線 l の方程式は，$y = 10(x-2) + 4$ すなわち，$y = 10x - 16$ $\cdots$ (答え)

(2) 接線 l と平行な直線の方程式を $y = 10x + k$ とするとき，この直線と曲線 C との共有点の個数を調べる。曲線 C において，l と平行なもう1つの接線を求める。$y' = 3x^2 - 2 = 10$ となる x は，$x = \pm 2$ だから，点 P 以外の曲線 C 上の接点の座標は，$(-2,\ -4)$ となる。

したがって，この点における接線の方程式は，$y = 10x + 16$ となる。

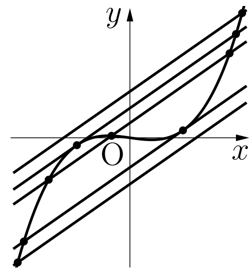
よって，直線 $y = 10x + k$ と曲線 C との共有点の個数は，

$k < -16$，$16 < k$ のとき，　1個

$k = -16$，16 のとき，　2個

$-16 < k < 16$ のとき，　3個

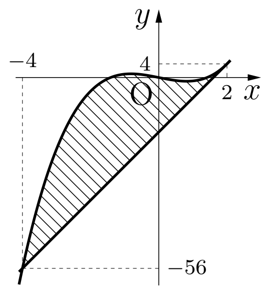
となる。



(3) 曲線 C と接線 l とで囲まれた図形の面積 S を定積分を用いて計算すると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-4}^{2} \{x^3 - 2x - (10x - 16)\}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x\right]_{-4}^{2} \\
&= 108
\end{aligned}
$$

となる。



解答番号	正　解	配　点	備　考
58	1	4	
59	0		
60	1		
61	6		
62	1	5	
63	6		
64	1		
65	6		

解答番号	正　解	配　点	備　考
66	1	2	
67	2	2	
68	3	2	
69	2	4	
70	4		
71	1	6	
72	0		
73	8		