2020 年度 愛知工科大学 工学部　一般選抜試験問題 前期（Ａ日程）

数学

受験番号		氏　名	

注意事項

1. **試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 問題冊子 1 冊、マークシート 1 枚、記述問題解答用紙 1 枚が配布されているか、確認してください。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明､ページの落丁･乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. **試験時間は 70 分です。**この時間内に解答してください。
5. 問題冊子に受験番号と氏名を記入してください。
6. マークシートには、解答欄以外に次の記入欄があります。監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

   ① **志望学科・氏名欄**　志望学科を〇で囲み、氏名を記入してください。
   ② **受験番号欄**　受験番号を記入し、さらにその右横のマーク欄にマークしてください。

7. 解答は、マークシートの解答欄にマークしてください。例えば、 10 と表示のある問いに対して　3 と解答する場合は、次の例のように番号 10 の解答欄の 3 にマークしてください。

番号	マーク
10	0　1　2　●　4　5　6　7　8　9

8. 解答には､ＨＢまたはＨＢより濃い鉛筆､およびプラスチック製の消しゴムを使用してください。マークが薄い、一部しか塗っていない、訂正個所を消しゴムできれいに消していない場合など、不明瞭またはあいまいなものは解答が正しく読み取られない場合があります。

   マークの記入方法（1 と答えたい場合に対するマーク例）

良い例	悪い例			
●				

9. この問題には、必答問題と学科別問題があります。

   ① 第 1 問と第 2 問は必答問題です。必ず解答してください。第 1 問は記述解答問題です。記述問題解答用紙に解答してください。その際、受験番号、氏名を忘れないで記入してください。
   ② 第 3 問から第 6 問は学科別問題です。
      ア．「機械システム工学科」及び「電子制御・ロボット工学科」の志願者は、第 3 問、第 4 問を解答してください。
      イ．「情報メディア学科」の志願者は、第 5 問、第 6 問を解答してください。

10. 問題冊子の余白等は適宜利用可能ですが、どのページも切り離してはいけません。
11. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

前期Ａ日程

数　学

（　問題：全6ページ　）

（　解答番号：　1　～　80　）

数学の問題には，必答問題と学科別問題があります。
第１問は記述問題です。記述問題解答用紙に解答すること。
記述問題解答用紙には受験番号，氏名を必ず記載すること。

必答問題　第１問および第２問は必ず解答してください。

（　第１問　　記述問題解答用紙に解答　）

（　第２問　解答番号：　1　～　15　）

学科別問題

機械システム工学科および電子制御・ロボット工学科志願者

第３問と第４問を選択して解答してください。

（　第３問　解答番号：　16　～　29　）

（　第４問　解答番号：　30　～　46　）

情報メディア学科志願者

第５問と第６問を選択して解答してください。

（　第５問　解答番号：　47　～　63　）

（　第６問　解答番号：　64　～　80　）

第１問 (必答問題)

以下の記述問題を，記述問題解答用紙に解答せよ。

放物線 $y = x^2$ 上の 2 点を $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 4)$ とし，この 2 点を通り，線分 AB を直径とする円において，放物線との共有点で，A，B 以外の点を P とする。

(1) 点 P の x 座標が満たす方程式を導け。

(2) 前問 (1) で導いた方程式を解け。

(3) 点 P の座標をすべて求めよ。

第2問 (必答問題)

以下の式中または文中の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{\ 15\ }$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 1 ～ 15 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

[1] $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$，$\sin\alpha = \sin\dfrac{7}{5}\pi$，

$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\cos\beta = \cos\dfrac{7}{5}\pi$ のとき，

$$\alpha = -\frac{\boxed{\ 1\ }}{5}\pi, \quad \beta = \frac{\boxed{\ 2\ }}{5}\pi, \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{\boxed{\ 3\ } + \sqrt{\boxed{\ 4\ }}}{\boxed{\ 5\ }}$$

である。

[2] 関数 $y = \sin 2\theta - 2\sin\theta - 2\cos\theta + 3 \quad \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ の最大値と最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと，$y = \left(t - \boxed{\ 6\ }\right)^2 + \boxed{\ 7\ } \quad \left(\boxed{\ 8\ } \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\ 9\ }}\right)$

となるから，y は

$t = \boxed{\ 10\ }$ すなわち，$\theta = -\dfrac{\pi}{\boxed{\ 11\ }}$ のとき，最大値 $\boxed{\ 12\ }$ をとり，

$t = \boxed{\ 13\ }$ すなわち，$\theta = \boxed{\ 14\ }$ のとき，最小値 $\boxed{\ 15\ }$ をとる。

第3問 (学科別問題) (機械システム工学科／電子制御・ロボット工学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{16}$ ～ $\boxed{29}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 16 ～ 29 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。

$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{5a_n + 4}{a_n + 2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項と極限を求めよう。

まず，$\alpha = \dfrac{5\alpha + 4}{\alpha + 2}$ を満たす α を求めよう。両辺に $\alpha + 2$ をかけて整理すると，

$\alpha^2 - \boxed{16}\,\alpha - \boxed{17} = 0$ となる。この解は，$\alpha = -\boxed{18}$，$\boxed{19}$ である。

このとき，$\dfrac{a_{n+1} - \boxed{19}}{a_{n+1} + \boxed{18}} = \dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}}\left(\dfrac{a_n - \boxed{19}}{a_n + \boxed{18}}\right)$，$\dfrac{a_1 - \boxed{19}}{a_1 + \boxed{18}} = \dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$

となるから，数列 $\left\{\dfrac{a_n - \boxed{19}}{a_n + \boxed{18}}\right\}$ は，初項 $\dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$，公比 $\dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}}$ の等比数列である。

したがって，$\dfrac{a_n - \boxed{19}}{a_n + \boxed{18}} = \left(\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\right)^n$ より，

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = -\boxed{26} + \dfrac{\boxed{27}}{\boxed{28} - \left(\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\right)^n}$ となる。

さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限は，$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{29}$ となる。

第4問 (学科別問題) (機械システム工学科／電子制御・ロボット工学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{30}$ ～ $\boxed{46}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 30 ～ 46 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

関数 $f(x) = \displaystyle\int_{-3x}^{3x} \frac{t^2-2}{1+e^t}\,dt$ について考えよう。

まず，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよう。$\dfrac{t^2-2}{1+e^t}$ の原始関数の 1 つを $g(t)$ とおくと，

$f(x) = \displaystyle\int_{-3x}^{3x} \frac{t^2-2}{1+e^t}\,dt = \Big[g(t)\Big]_{-3x}^{3x} = g(3x) - g(-3x)$ と表される。

これを合成関数の微分法を用いて微分すると，$f'(x) = \boxed{30}\,(g'(3x) + g'(-3x))$ となる。

ここで，$\dfrac{1}{1+e^{3x}} + \dfrac{1}{1+e^{-3x}} = \boxed{31}$ に注意すると，

$f(x)$ の導関数 $f'(x) = \boxed{32}\boxed{33}\,x^2 - \boxed{34}$ が求まる。これと $f(0) = 0$ から

関数 $f(x) = \boxed{35}\,x^3 - \boxed{36}\,x$ が求まる。

この結果を用いると，$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2-2}{1+e^t}\,dt = -\frac{\boxed{37}}{\boxed{38}}$ が得られる。

関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ から，関数の増減を調べると，

$x = -\dfrac{\sqrt{\boxed{39}}}{\boxed{40}}$ のとき，極大値 $\dfrac{\boxed{41}\sqrt{\boxed{42}}}{\boxed{43}}$ をとり，

$x = \dfrac{\sqrt{\boxed{39}}}{\boxed{40}}$ のとき，極小値 $-\dfrac{\boxed{44}\sqrt{\boxed{45}}}{\boxed{46}}$ をとる。

第5問 (学科別問題) (情報メディア学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{47}$ ～ $\boxed{63}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 47 ～ 63 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。

数直線上の原点を出発点として動く点Qがある。1個のさいころを投げて，偶数の目が出たときは正の向きに3だけ移動し，1または3の目が出たときは負の向きに1だけ移動し，5の目が出たときは負の向きに2だけ移動する。1個のさいころを5回投げたとき，点Qの座標が2である確率を求めよう。

1個のさいころを投げたとき，偶数の目が出る事象を A，1または3の目が出る事象を B，5の目が出る事象を C とすると，これらの起こる確率は，それぞれ

$$P(A)=\frac{1}{\boxed{47}},\quad P(B)=\frac{1}{\boxed{48}},\quad P(C)=\frac{1}{\boxed{49}}$$

である。また，1個のさいころを5回投げたとき，A，B，C が起こる回数をそれぞれ x，y，z とすると，これらは，0から5までの整数で，さいころを1回投げるごとに，A，B，C のうち，いずれか1つが起こるから，

$$x+y+z=\boxed{50} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす。さらに，点Qの座標が2になっているとき，

$$\boxed{51}x-y-\boxed{52}z=\boxed{53} \qquad \cdots\cdots ②$$

も満たす。① と ② から y を消去すると，

$$z=\boxed{54}x-\boxed{55} \qquad \cdots\cdots ③$$

が得られる。$0 \leqq x, y, z \leqq 5$ の範囲で，①，③ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を求めると，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\boxed{56},\ \boxed{57},\ \boxed{58}\right)$$

となる。ここで，1個のさいころを5回投げたとき，A が $\boxed{56}$ 回，B が $\boxed{57}$ 回，C が $\boxed{58}$ 回起こる場合の数は，$\boxed{59}\boxed{60}$ 通りある。

したがって，1個のさいころを5回投げたとき，点Qの座標が2である確率は，$\dfrac{\boxed{61}}{\boxed{62}\boxed{63}}$ である。

第6問 (学科別問題) (情報メディア学科の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{64}$ ～ $\boxed{80}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 64 ～ 80 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。また，根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えよ。

関数 $f(x) = x^3 - 6x + 4$ を因数分解すると

$f(x) = \left(x - \boxed{64}\right)\left(x^2 + \boxed{65}x - \boxed{66}\right)$ となる。

このとき，$x^2 + \boxed{65}x - \boxed{66} = 0$ の 2 つの解を α，$\beta\,(\alpha < \beta)$ とすると，

$\alpha + \beta = -\boxed{67}$，$\alpha\beta = -\boxed{68}$，$\beta - \alpha = \boxed{69}\sqrt{\boxed{70}}$ となる。

2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ と $\alpha < x < \beta$ の範囲で曲線 $y = f(x)$ 上を動く点 P に対して，

△ABP の面積が最大となる x の値を求めると，$x = -\sqrt{\boxed{71}}$ となる。

定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ を求めよう。

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \left[\frac{1}{\boxed{72}}x^4 - \boxed{73}x^2 + \boxed{74}x\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{\boxed{72}}(\beta^4 - \alpha^4) - \boxed{73}(\beta^2 - \alpha^2) + \boxed{74}(\beta - \alpha) \\
&= \left(\frac{1}{\boxed{72}}(\beta^2 + \alpha^2) - \boxed{73}\right)(\beta^2 - \alpha^2) + \boxed{74}(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

ここで，$\alpha + \beta = -\boxed{67}$，$\alpha\beta = -\boxed{68}$，$\beta - \alpha = \boxed{69}\sqrt{\boxed{70}}$ を用いると

$\beta^2 + \alpha^2 = \boxed{75}$，$\beta^2 - \alpha^2 = -\boxed{76}\sqrt{\boxed{77}}$ となるから，定積分

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \boxed{78}\boxed{79}\sqrt{\boxed{80}}$$

が求まる。